أولاً

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

دراسة التغيرات

(5) f معرّفة ومستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

(5) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(5) $f'(x) = 3x^2 - 3$

(5) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ أو $x = -1$

(5) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

(5) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$

(5)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

(5) لنرصد الـ $4 = f(-1)$ قيمة كبرى محلية

(5) يوجد مجال $D_1 =]-\infty, 1[$ يضم -1

(5) $D \cap D_1 =]-\infty, 1[$

(5) نجد أن $f(x) \leq 4 = f(-1)$ من أجل كل $x \in]-\infty, 1[$

(5) إذاً $f(-1) = 4$ قيمة كبرى محلية

(60) المجموع

ثانياً التمرين الأول

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2 + x^3}}$$

(5) عند تعويض (0) نجد أن حالة عدم تعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$

لإزالة ذلك

(10) $$f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2(1+x)}} = \frac{\sin \pi x}{|x|\sqrt{1+x}}$$

(5) $x - = |x|$ في جوار 0 من اليسار $]-1, 0[$

(5) $$f(x) = -\frac{\sin \pi x}{\pi x} \times \frac{\pi}{\sqrt{1+x}}$$

(5+10) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \pi x}{\pi} = 1$ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1$

(5) إذاً

(5) $\lim_{x \to 0} f(x) = (-1)(1) = -1$

(50) المجموع

التمرين الثاني

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

(10) $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$-4R_1 + R_2 \to R_2$

$-2R_1 + R_3 \to R_3$

(15) (15) $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$-2R_3 \to R_3$

(10) $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 + R_3 \to R_3$

(50) $$A \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-10} & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -1 \end{bmatrix}$$

(5) رتبة المصفوفة المرتبة المطابقة لـ A هي 3

(5) المجموع

التمرين الثالث

$A(1, 0, 3)$ ، $B(4, 1, 2)$ ، $C(1, -3, -1)$

$\vec{AB}\ (4-1,\ 1-0,\ 2-3)$

(10) $\vec{AB}\ (3,\ 1,\ -1)$

$\vec{BC}\ (1-4,\ -3-1,\ -1-2)$

(10) $\vec{BC}\ (-3,\ -4,\ -3)$

$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = (3)(-3)+(1)(-4)+(-1)(-3)$

(10) $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = -9-4+3 = -10$

$\theta = (\vec{AB}, \vec{BC})$

(10) $\cos\theta = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|}$

(5) $\cos\theta = \dfrac{-10}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{9+16+9}}$

$= \dfrac{-10}{\sqrt{11}\sqrt{34}} = \dfrac{-10}{\sqrt{(11)(34)}}$

(5) $\cos\theta = \dfrac{-10}{\sqrt{374}}$ θ منفرجة

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

(5) $\sin^2\theta = 1-\dfrac{100}{374} = \dfrac{274}{374} = \dfrac{137}{187}$

(5) $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{137}{187}}$

(60) الحل — طريقة ثانية

(10) $\vec{AB}\wedge\vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \end{vmatrix}$

(10) $\vec{AB}\wedge\vec{BC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}\vec{k}$

(10) $\vec{AB}\wedge\vec{BC} = -7\vec{i}+12\vec{j}-9\vec{k}$

(10) $\sin\theta = \dfrac{|\vec{AB}\wedge\vec{BC}|}{|\vec{AB}|\,|\vec{BC}|} = \dfrac{\sqrt{49+144+81}}{\sqrt{11}\sqrt{34}}$

(10) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{274}}{\sqrt{(11)(34)}} = \sqrt{\dfrac{274}{(11)(34)}}$

(10) $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{274}{374}} = \sqrt{\dfrac{137}{187}}$

(60) الحل

$f(x) = \dfrac{x}{e^x} + x - 1$ (C)

$\Delta: y = x-1$

(5) $f(x) - y_\Delta = \dfrac{x}{e^x} + x - 1 - (x-1)$

(5) $f(x) - y_\Delta = \dfrac{x}{e^x}$

(10) $\lim\left(f(x) - y_\Delta\right) = 0$

(5) $x \to +\infty$ إذن $\Delta: y = x-1$ مقارب مائل لـ (C)

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة

$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{e^x} = 0$ المعادلة

$x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{x}{e^x}$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C) تحت Δ			(C) فوق Δ	

(10)

2) تقاطع (C) مع (oy)

(5) $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -1$

(5) نقطة التقاطع $M(0,-1)$

(5) $f'(x) = \dfrac{e^x - e^x \cdot x}{e^{2x}} + 1$

(5) $m = f'(0) = \dfrac{1-0}{1} + 1$

(5) $m = 2$

(5) $(d)\ y+1 = 2(x-0)$

(70) الحل — السؤال الثاني

$E: 5x^2 + 9y^2 - 10x + 18y - 71 = 0$

نتمة مسألة القطع

$5(x^2-2x)+9(y^2+2y)-31=0$

نقوم بعمليات كما يلي

(5+5) $5[x^2-2x+1-1]+9[y^2+2y+1-1]-31=0$

(5+5) $5[(x-1)^2-1]+9[(y+1)^2-1]-31=0$

$5(x-1)^2-5+9(y+1)^2-9-31=0$

$5(x-1)^2+9(y+1)^2=45 \Rightarrow$

(5) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$

(5) $M_0(1,-1)$ مركز القطع

(5) $a^2=9 \Rightarrow a=3$

$b^2=5 \Rightarrow b=\sqrt{5}$

بما أن المحور الحرقي يوازي $x'x$ فإن $a>b$

(5) $a^2=b^2+c^2$

$9=5+c^2 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=2$

البؤرتان

$F(x_0+c, y_0)$, $F'(x_0-c, y_0)$

(5) $F(1+2,-1)$ $F'(1-2,-1)$

(5) $F(3,-1)$, $F'(-1,-1)$

الذروتان على المحور الكبير

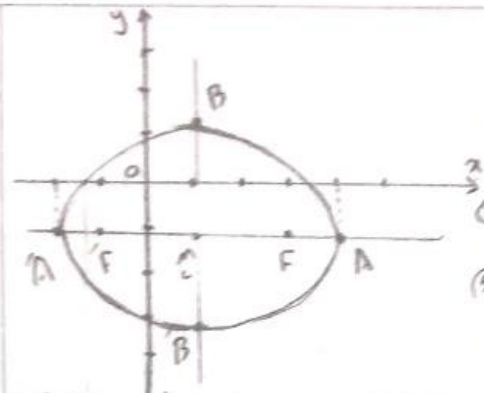
$A(x_0+a, y_0)$, $A'(x_0-a, y_0)$

(5) $A(1+3,-1)$ $A'(1-3,-1)$

(5) $A(4,-1)$, $A'(-2,-1)$

ثم نرسم القطع

$c=\sqrt{5}$



(1.5)

(2) $M(3, \frac{2}{3})$ ننوض في معادلة القطع

$\frac{(3-1)^2}{9}+\frac{(\frac{2}{3}+1)^2}{5}=1$

$\frac{4}{9}+\frac{(\frac{5}{3})^2}{5}=1$

$\frac{4}{9}+\frac{\frac{25}{9}}{5}=1$

(5) $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}=1$

محققة إذاً $M \in E$

نعين معادلة المماس في النقطة

(5) $m=-\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{x_0-x_c}{y_0-y_c}\right]=\frac{-5}{9}\left[\frac{3-1}{\frac{2}{3}+1}\right]$

$m=-\frac{5}{9}\left(\frac{2}{\frac{5}{3}}\right)=(-\frac{5}{9})(\frac{6}{5})$

(5) $m=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

أو نعين معادلة المماس بالاشتقاق

(5) معادلة المماس عند M

(5) $d: y-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}(x-3)$

(10) المجموع

السؤال الثالث

$P(H)=\frac{2}{3}$ $P(T)=\frac{1}{3}$

تمارين في فضاء العينة

(5+5) $2+2+2=6 \leftarrow (H,H,H)$

(5+5) $2+2+1=5 \leftarrow (\underbrace{H,H}_{2},T)$

(5+5) $1+1+2=4 \leftarrow (\underbrace{T,T}_{2},H)$

(5+5) $1+1+1=3 \leftarrow (T,T,T)$

(10) $X(\Omega)=\{3,4,5,6\}$

(5) $F(3)=P(T,T,T)=(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}$

(5) $F(4)=P(\underbrace{T,T}_{2},H)=(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})(3)=\frac{6}{27}$

(5) $F(5)=P(\underbrace{H,H}_{2},T)=(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})(3)=\frac{12}{27}$

(5) $F(6)=P(H,H,H)=(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})=\frac{8}{27}$

(10)

x_i	3	4	5	6	المجموع
$F(x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

(5) $E(X)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i F(x_i)$

$E(X)=\frac{3}{27}+\frac{24}{27}+\frac{60}{27}+\frac{48}{27}=\frac{135}{27}$

(5) $E(X)=\frac{135}{27}=5$

المجموع 90

رابعاً $f(x)=\frac{x}{x-1}$ $R/\{1\}$

1) دراسة التغيرات

(5) f متزايدة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

وحسقرة ومستقعرة على كل من المجالين

(10) $]-\infty,1[\ ,\ ]1,+\infty[$

(5+5) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

(5) إذن $\Delta: y=1$ مقارب (Γ) يوازي $x'x$

والتقارب من جهة $(-\infty)$ ومن جهة $(+\infty)$

(5) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{-0}=-\infty$

(5) $x\to 1$ $\Delta: x=1$ مستقيم مقارب يوازي $y'y$

(5) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{+0}=+\infty$

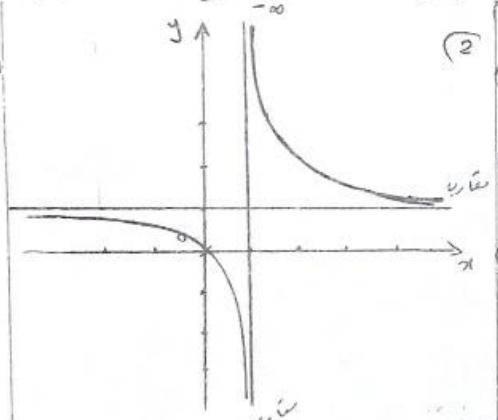
(5) $x\to 1$ $\Delta: x=1$ مقارب يوازي $y'y$

$f'(x)=\frac{1(x-1)-(x)}{(x-1)^2}$

(10) $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}<0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	1

(2)



(20)

(5) $R/\{1\}$ المتزامنة على $f_1(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ (3)

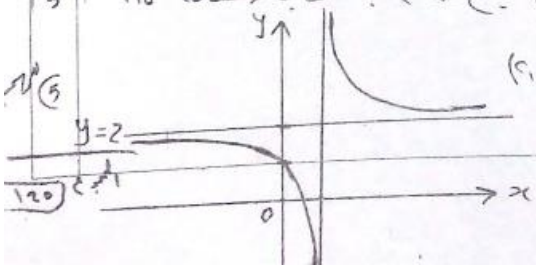
$f_1(x)-f(x)=\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}$

(10) $=\frac{x-1}{x-1}=1$

(5) $f_1(x)=f(x)+1$

(5) C_1 يتبع عن C بانسحاب شعاعه $\vec{u}+1$

(5)



(5) (C1)

المجموع 120